第５講　整数の性質

【CHECK & UP】

1　［1］　2数24と42について，次の問いに答えよ．

(1)　2数の最大公約数 G，最小公倍数 L を求めよ．

(2)　$24=aG$，$42=bG$ と表したとき，a と b の最小公倍数 g を求めよ．

(3)　L を G と g を用いて表せ．

［2］　3数150，270，630について，次の問いに答えよ．

(1)　3数の最大公約数 G，最小公倍数 L を求めよ．

(2)　$150=aG$，$270=bG$，$630=cG$ と表したとき，a，b，c の最小公倍数 g を求めよ．

(3)　L を G と g を用いて表せ．

2　不定方程式 $3x-5y=1$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　①を満たす整数解の1つに，$x=2$，$y=1$ がある．
これらを①に代入すると，$3\cdot2-5\cdot1=1$　……②　となる．
①−②を計算し，$3A=5B$ の形に変形せよ．

(2)　3と5の最大公約数は1であることから，整数 A，B が $3A=5B$ を満たすとき，A は5の倍数であり，$A=5k$（k は整数）と表せる．
このことを用いて，①を満たす整数解 x，y を求めよ．

3　次の（　　　）に当てはまるものを　①偶数　　②奇数　から選べ．

(1)　(偶数)＝(奇数)×(　　　)　　(2)　(奇数)＝(奇数)×(　　　)

(3)　(偶数)＝(偶数)±(　　　)　　(4)　(偶数)＝(奇数)±(　　　)

(5)　(奇数)＝(偶数)±(　　　)　　(6)　(奇数)＝(奇数)±(　　　)

4　実数 a，b について，$a\times b=4$ であるとする．次の(1)〜(3)のそれぞれの条件に適する a，b を求めよ．

(1)　a，b は整数

(2)　a，b は自然数

(3)　a，b は整数，$a>b$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［1］ 1から100までの自然数の積 $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot99\cdot100$ を P とする．

P が2で何回割り切れるかを求めよう．

P が2で割り切れる回数は，P を素因数分解したときの素因数2の指数である．1から100までの100個の自然数のうち，2で割り切れるものの個数は2, 4, 6, 8, ……，98，100の［アイ］個である．このうち4は2で［ウ］回割り切れる．したがって，次に4すなわち 2^2 で割り切れるものの個数を求めると［エオ］個である．同様に，2で3回割り切れるものの個数，4回割り切れるものの個数を順に求めることにより，P は2で［カキ］回割り切れる．

$10=2\times5$ であることを利用すると，P の末尾には0が連続して［クケ］個並ぶことがわかる．

［2］ 12と30の最大公約数は［ア］，最小公倍数は［イウ］である．ここで $G=$［ア］とおくと，$12=$［エ］G，$30=5G$ と表される．［エ］と5の最大公約数は［オ］であり，その最小公倍数は［カキ］である．よって $l=$［カキ］とおくと，12と30の最小公倍数について，$Gl=60$ が成り立つことがわかる．

3つの自然数 a，b，c $(a<b<c)$ について，a，b，c の最大公約数が12，最小公倍数が216であるとする．$a=12a'$，$b=12b'$，$c=12c'$ とおくと，a'，b'，c' の最大公約数は［ク］である．ここで a'，b'，c' の最小公倍数を m とすると，a，b，c の最小公倍数が216であることから，$m=$［ケコ］であることがわかる．a'，b'，c' は m の約数であり，$a'<b'<c'$ であることから，c' の値は［サ］または［シス］に限られる．$c'=$［サ］のとき，$(a,\ b,\ c)$ の組は［セ］組である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　整数 N は4で割ると2余り，9で割ると8余る数である．

N は整数 x，y を使って　$N=4x+2$，$N=9y+8$　と表される．

よって x，y は関係式 $4x-9y=$ ア　…… ①　を満たす．

①は $9y=$ イ（$2x-$ ウ）と変形できる．

2と9は互いに素であることより，y は イ の倍数であることがわかる．

したがって，整数 k を用いて $y=$ イ k と表すと，$2x=$ エ $k+$ オ と表される．

$2x$ は偶数であることより，k は奇数であることがわかる．

したがって，①を満たす整数 x，y のうち，y が1桁の整数であるものは

$(x,\ y)=($ カ , キ $)$，$($ クケ , コ $)$

である．

①は $4(x-$ カ $)=9(y-$ キ $)$ と変形できることから，x，y は整数 t を用いて $x=9t+$ カ，$y=4t+$ キ と表される．

よって，N は整数 t を用いて $N=$ サシ $t+$ スセ と表される．

[2]　方程式 $24x-19y=3$　…… ①　を満たす整数の組（x，y）を考える．

$24x-19y=1$ を満たす整数解の1つとして，$x=4$，$y=$ ア が挙げられる．

よって，$24\times4-19\times$ ア $=1$ より $24\times12-19\times$ イウ $=3$ であることから

$x=12$，$y=$ イウ は①の整数解の1つである．

①の整数解のうち，$0\leqq x\leqq50$ を満たすものは，x の値が小さい順に

$(x,\ y)=($ エオ , カキ $)$，$($ クケ , コサ $)$，$($ シス , セソ $)$

である．また，$-20\leqq y-x\leqq20$ を満たすものは タ 個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　8 進法で表した 3 桁の整数 $N = abc_{(8)}$ を 7 進法で表したところ $cba_{(7)}$ となった．この数を 10 進法で表そう．

整数 a，b，c のとりうる値の範囲は

$\boxed{ア} \leqq a \leqq \boxed{イ}$，$\boxed{ウ} \leqq b \leqq \boxed{イ}$，$\boxed{エ} \leqq c \leqq \boxed{イ}$

である．

このとき　$abc_{(8)} = cba_{(7)}$ より

$\boxed{オ}^2 a + \boxed{オ} b + c = \boxed{カ}^2 c + \boxed{カ} b + a$

これを変形すると　$b = \boxed{キ}(16c - 21a)$　……①

したがって整数 b は $b = \boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$

（$\boxed{ク} < \boxed{ケ} < \boxed{コ}$）に限られる．

$b = \boxed{ク}$，$\boxed{コ}$ のとき，①を満たす整数 a，c は存在しない．

$b = \boxed{ケ}$ のとき，①より　$\boxed{サシ} c - \boxed{スセ} a = 1$

これを満たす整数 a，c は　$a = \boxed{ソ}$，$c = \boxed{タ}$

したがって N を 10 進法で表すと $\boxed{チツテ}$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　整数の性質

1 ［1］ 連立方程式

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=8 & \cdots\cdots① \\ 5x-7y+6z=7 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を満たす整数解の組$(x,\ y,\ z)$について考える．

①，②よりzを消去して変形すると

[ア]$(8x-$[イウ]$)=$[エ]y　……③ となる．

[ア]と[エ]は互いに素であることより，yは偶数であることがわかる．

よって，整数kを使って$y=2k$と表すと，③は

$8x=$[エ]$k+$[イウ]

と変形できる．左辺は偶数であることから，kは奇数であることがわかる．

したがって，連立方程式を満たす整数解のうち，xの値が正で最も小さいものは

$(x,\ y,\ z)=($[オ]，[カ]，[キ]$)$

である．

［2］ 不定方程式$8x+5y=k$の整数解について考える．

(1) $k=1$とする．

$x>-10$，$y>-10$を満たす解は

$(x,\ y)=($[アイ]，[ウエ]$)$，$($[オカ]，[キ]$)$，$($[ク]，[ケコ]$)$

である．ただし，[アイ]$<$[オカ]$<$[ク]とする．

(2) $k=17$とする．

$0<x+y<100$を満たす解は[サシ]個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 和が 600，最小公倍数が 5772 である 2 つの自然数 a，b $(a>b)$ がある．

a，b の最大公約数を G とし，$a=a'G$，$b=b'G$ とすると，a'，b' の最大公約数は

［ア］である．また，$a'G+b'G=600$，$a'b'G=5772$ である．

ここで，600，5772 をそれぞれ素因数分解すると

$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$

$5772=2^{［イ］}\cdot［ウ］\cdot 13\cdot 37$

であるから $G=$［エオ］である．したがって，$a=$［カキク］，$b=$［ケコサ］

である．

このとき，$G=ma+nb$ を満たす整数 m，n の組のうち，m の値が正で最小である

ものは，$m=$［シ］，$n=$［スセソ］である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　正の整数 N を 4 進法および 6 進法で表すと，それぞれ 3 けたの数 $abc_{(4)}$ および $pqr_{(6)}$ になり，また $a+b+c=p+q+r$ である．このとき

$N=$ [アイ] $a+$ [ウ] $b+c=36p+6q+r$

と表される．これと $a+b+c=p+q+r$ から，c と r を消去して整理すると

[エ] $(5a+b)=$ [オ] $(7p+q)$ ……①

[エ] と [オ] の最大公約数は [カ] であることより，$5a+b$ は [オ] の倍数である．

よって b が [オ] の倍数であることがわかる．

ここで [キ] $\leqq b \leqq$ [ク] であることから，$b=$ [ケ] である．

このとき①より $p+q=3(a-2p)$ であり，左辺が正より $a>2p$ であることがわかる．

これと a，p のとり得る値の範囲から，$a=$ [コ]，$p=$ [サ] であり，さらに $q=2$，$c=r$ であることがわかる．

c は [シ] $\leqq c \leqq$ [ス] を満たすすべての整数の値をとり得るので，題意を満たす整数 N のうち，最小のものは $N=$ [セソ] である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　整数の性質

【CHECK & UP】

1

［1］(1) $24=2^3\cdot3$　$42=2\cdot3\cdot7$　より

最大公約数は $G=2\cdot3=\mathbf{6}$

最小公倍数は $L=2^3\cdot3\cdot7=\mathbf{168}$

(2) $24=4G$, $42=7G$　より，$a=4$, $b=7$

よって，a, b の最小公倍数は $g=4\cdot7=\mathbf{28}$

(3) $\boldsymbol{L=Gg}$

> 2数 a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とするとき，$a=Ga'$, $b=Gb'$ とおくと
> ・a', b' は互いに素
> ・$L=Ga'b'$
> である．2数 a', b' のとき，その最小公倍数は積 $a'b'$ と等しい．この値を g とおくと
> $L=Gg$ と表される．

［2］(1) $150=2\cdot3\cdot5^2$　$270=2\cdot3^3\cdot5$　$630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$　より

最大公約数は $G=2\cdot3\cdot5=\mathbf{30}$

最小公倍数は $L=2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7=\mathbf{9450}$

(2) $150=5G$, $270=9G$, $630=21G$ より，

$a=5$, $b=9=3^2$, $c=3\cdot7$

よって a, b, c の最小公倍数は

$g=3^2\cdot5\cdot7=\mathbf{315}$

(3) $\boldsymbol{L=Gg}$

> 3数 a, b, c の最大公約数を G, 最小公倍数を L とするときは，
> ・a', b', c' は互いに素
> であるが，
> ・$L=Ga'b'c'$ は成り立たない．a', b', c' が互いに素であっても，その最小公倍数は積 $a'b'c'$ とイコールではないことに注意．

2

(1) $3x-5y=1$　……①　$3\cdot2-5\cdot1=1$　……② について

①−②より　$3(x-2)-5(y-1)=0$

よって　$\mathbf{3(x-2)=5(y-1)}$　……③

(2) 3, 5の最大公約数が1であることから

③より　$x-2=5k$ (k は整数) と表される．

よって　$x=5k+2$

このとき③より　$3\cdot5k=5(y-1)$　$3k=y-1$

よって　$y=3k+1$

したがって①を満たす整数解は

$\boldsymbol{x=5k+2}$, $\boldsymbol{y=3k+1}$ (k は整数)

> x, y に関する1次不定方程式の代表的な解法の1つである．
> 不定方程式を満たす解の1つ(特殊解)をみつけ，それを代入した式を作り，元の不定方程式との差をとると，x, y の係数でくくることができる．それを両辺に散らすことで，(○の倍数)＝(□の倍数)の形となる．
> ○と□が互いに素(最大公約数が1)であることを利用することで，x, y が整数を表す文字で表現される．

3

(1) ①　(2) ②

(3) ①　(4) ②

(5) ②　(6) ①

> 2つの整数の演算について
> ・積が偶数 ⇔ 少なくともどちらかが偶数
> ・積が奇数 ⇔ ともに奇数
> ・和(差)が偶数 ⇔ ともに偶数またはともに奇数
> ・和(差)が奇数 ⇔ 一方が偶数，もう一方が奇数

4

(1) $(a, b)=\mathbf{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1),\ (-1,\ -4),\ (-2,\ -2),\ (-4,\ -1)}$

(2) $(a, b)=\mathbf{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)}$

(3) $(a, b)=\mathbf{(4,\ 1),\ (-1,\ -4)}$

> 2整数の積が一定値のとき，その2整数の組合せは有限である．条件に合う組合せについて，その積の値の「約数」から列挙することができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】 ※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1

［1］　1 から 100 までの 100 個の自然数のうち

　　2 で割り切れるものの個数は $100\div2=50$　より **50** 個

　　$4=2^2$ より 4 は 2 で **2** 回割り切れる．

　　2^2 で割り切れるものの個数は $100\div4=25$　より **25** 個

　　2^3 で割り切れるものの個数は $100\div8=12$ あまり 4　より 12 個

　　2^4 で割り切れるものの個数は $100\div16=6$ あまり 4　より 6 個

　　2^5 で割り切れるものの個数は $100\div32=3$ あまり 4　より 3 個

　　2^6 で割り切れるものの個数は $100\div64=1$ あまり 36　より 1 個

　したがって，P は 2 で $50+25+12+6+3+1=$ **97** 回割り切れる．

　また，1 から 100 までの 100 個の自然数のうち

　　5 で割り切れるものの個数は $100\div5=20$　より 20 個

　　5^2 で割り切れるものの個数は $100\div25=4$　より 4 個

　したがって，P は 5 で $20+4=24$ 回割り切れる．

　$10=2\times5$ より P は 10 で 24 回割り切れる．

　したがって P の末尾には 0 が連続して **24** 個並ぶことがわかる．

［2］　12 と 30 の最大公約数は **6**　　最小公倍数は **60**

　　$G=6$ とおくと，$12=\mathbf{2}G$，$30=\mathbf{5}G$ と表される．

　　2 と 5 の最大公約数は **1**　　最小公倍数は **10**

　　よって $l=10$ とおくと，12 と 30 の最小公倍数 60 は，G と l の積を用いて

　　$Gl=60$　と表される．

　3 つの自然数 a，b，$c(a<b<c)$ について，

　a，b，c の最大公約数が 12，最小公倍数が 216 のとき．

　　$a=12a'$，$b=12b'$，$c=12c'$ とおくと，a'，b'，c' の最大公約数は **1**

　ここで a'，b'，c' の最小公倍数を m とすると，a，b，c の最小公倍数が 216 であることから

　　$12m=216$ より　$m=$ **18** であることがわかる．

　a'，b'，c' は m の約数であり，$a'<b'<c'$，a'，b'，c' の最大公約数は 1 であることから

　　c' の値は **9** または **18** に限られる．

　　$c'=9$ のとき，$(a',\ b',\ c')=(1,\ 2,\ 9),\ (1,\ 6,\ 9),\ (2,\ 3,\ 9),\ (2,\ 6,\ 9)$ の 4 組

　　したがって，$(a,\ b,\ c)$ の組は **4** 組である．

2

［1］　$N=4x+2=9y+8$　より $4x-9y=$ **6**　……①

　①を変形して　$9y=\mathbf{2}(2x-3)$　　2，9 は互いに素であり，左辺は 2 の倍数であることか

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ら y は2の倍数である．よって　$y=2k$（k は整数）と表すと

$9\cdot 2k=2(2x-3)$　$2x-3=9k$　　したがって　$2x=\mathbf{9}k+\mathbf{3}$　と表される．

$2x$ は偶数より $9k+3$ も偶数　　よって k は奇数であることがわかる．

したがって，①を満たす整数 x，y のうち，y が1桁の整数であるものは

$k=1$，3のときの $(x,\ y)=(\mathbf{6},\ \mathbf{2}),\ (\mathbf{15},\ \mathbf{6})$　である．

$x=6$，$y=2$ が解であることより $4\cdot 6-9\cdot 2=6$　……②

①−②より $4(x-6)-9(y-2)=0$　つまり　$4(x-6)=9(y-2)$

4，9は互いに素であることより，整数 t を用いて

$x-6=9t$　　つまり　$x=9t+6$ と表される．

このとき　$4\cdot 9t=9(y-2)$ より　$y-2=4t$　　つまり　$y=4t+2$　と表される．

よって　$N=4x+2=4(9t+6)+2=\mathbf{36}t+\mathbf{26}$　と表される．

［2］　$24x-19y=3$　……①

$24x-19y=1$ を満たす整数解の1つとして，$x=4$，$y=\mathbf{5}$ が挙げられる．

よって，$24\times 4-19\times 5=1$　より　$24\times 12-19\times \mathbf{15}=3$　……② であることから

$x=12$，$y=15$　は方程式①の整数解の1つである．

①−②より　$24(x-12)-19(y-15)=0$　つまり　$24(x-12)=19(y-15)$

よって整数 k を用いて

$x-12=19k$　つまり　$x=19k+12$ と表され，このとき $y=24k+15$ と表される．

方程式 $24x-19y=3$ の整数解のうち，$0\leqq x\leqq 50$ を満たすものは

$0\leqq 19k+12\leqq 50$　より　$k=0,\ 1,\ 2$ に限られ，このとき $(x,\ y)$ は

$(x,\ y)=(\mathbf{12},\ \mathbf{15}),\ (\mathbf{31},\ \mathbf{39}),\ (\mathbf{50},\ \mathbf{63})$

である．

また，$y-x=5k+3$　より $-20\leqq y-x\leqq 20$ を満たす整数 k のとり得る値の範囲は

$-20\leqq 5k+3\leqq 20$　より　$-4\leqq k\leqq 3$　　したがって求める個数は　**8** 個

3　［1］　$N=abc_{(8)}=cba_{(7)}$　において　$\mathbf{1}\leqq a\leqq \mathbf{6}$，$\mathbf{0}\leqq b\leqq 6$，$\mathbf{1}\leqq c\leqq 6$

$abc_{(8)}=cba_{(7)}$ より　$8^2a+8b+c=\mathbf{7}^2c+7b+a$

$63a+b-48c=0$　よって　$b=\mathbf{3}(16c-21a)$　……①

①の右辺は3の倍数より b も3の倍数．

$0\leqq b\leqq 6$ より　$b=\mathbf{0},\ \mathbf{3},\ \mathbf{6}$ に限られる．

$b=0$ のとき①より　$16c=21a$　16，21は互いに素より，これを満たす

$1\leqq a\leqq 6$ である整数 a は存在しない．

$b=6$ のとき　$16c-21a=2$ を満たす a，c の組は $a=6$，$c=8$ より不適．

$b=3$ のとき　①より　$\mathbf{16}c-\mathbf{21}a=1$　つまり　$16c=21a+1$

左辺は偶数より　a は奇数　　よって $a=1$，3，5に限られる．

このうち右辺が16の倍数になるのは　$a=\mathbf{3}$ のときのみ　　このとき $c=4$

このとき　$N=433_{(7)}=4\cdot 7^2+3\cdot 7+3=\mathbf{220}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　整数の性質

1

[1]　①×3＋②×2より　$16x-5y=38$　つまり　$\mathbf{2(8x-19)=5y}$

2と5は互いに素であることより，yは偶数．

よって　$y=2k$（kは整数）と表すと，

$2(8x-19)=5\cdot2k$　より　$8x=5k+19$　……①

左辺は偶数より　kは奇数である．

また，$x\geqq1$のとき　$8x\geqq8$　より　$5k+19\geqq8$　より　$k>-\dfrac{11}{5}$

$k=-1,\ 1,\ 3,$ ……を①に順次代入することにより，

$k=1$のときxは最小の自然数3となる．

したがって，求める整数解の組は　$(x,\ y,\ z)=(\mathbf{3,\ 2,\ 1})$

[2]　$8x+5y=k$　について

(1)　$k=1$のとき　$8x+5y=1$…①　の整数解の1つとして，$x=2,\ y=-3$が挙げられる．

よって$8\cdot2+5\cdot(-3)=1$　……②

①−②より　$8(x-2)+5(y+3)=0$　つまり　$8(x-2)=5(-y-3)$

8と5は互いに素であることより，$x-2=5m$（mは整数）と表せる．

このとき①の整数解は　$x=5m+2,\ y=-8m-3$（mは整数）と表せる．

$x>-10,\ y>-10$　より　$5m+2>-10,\ -8m-3>-10$

よって　$-\dfrac{12}{5}<m<\dfrac{7}{8}$　つまり　$m=-2,\ -1,\ 0$

したがって求める解は　$(x,\ y)=(\mathbf{-8,\ 13}),\ (\mathbf{-3,\ 5}),\ (\mathbf{2,\ -3})$

(2)　$k=17$のとき　$8x+5y=17$　……③

(1)より　$8\cdot2+5\cdot(-3)=1$　より　$8\cdot34+5\cdot(-51)=17$　……④

よって，③の整数解の1つとして　$x=34,\ y=-51$が挙げられる．

③−④より　$8(x-34)=5(-y-51)$

よって③を満たす整数解は　$x=5n+34,\ y=-8n-51$（nは整数）と表せる．

このとき　$x+y=-3n-17$

$0<x+y<100$　より　$0<-3n-17<100$　　$-39<n<-\dfrac{17}{3}$

これを満たす整数nは　$-38\leqq n\leqq-6$の**33**個で，これが③の整数解の個数である．

2

2つの自然数$a,\ b$の最大公約数をGとし，$a=a'G,\ b=b'G$とすると，$a',\ b'$の最大公約数は**1**である．

和が600より　$a+b=600$　$a'G+b'G=600$　よって　$(a'+b')G=2^3\cdot3\cdot5^2$　……①

最小公倍数が5772より　$a'b'G=5772=2^2\cdot\mathbf{3}\cdot13\cdot37$　……②

ここで，a'とb'が互いに素であることより，$a'+b',\ a'b'$も互いに素であることから

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

G は $(a'+b')G$ と $a'b'G$ の最大公約数である．

よって①，②より　$G=2^2\times3=\mathbf{12}$

このとき　$a'+b'=2\cdot5^2=50$，$a'b'=13\cdot37$である．

$a'>b'$より　$a'=37$，$b'=13$である．

したがって，$a=37\times12=\mathbf{444}$，$b=13\times12=\mathbf{156}$

また，$G=ma+nb$　より　$12=444m+156n$　つまり　$37m+13n=1$

これを満たす整数解の１つに$m=6$，$n=-17$がある．よって $37\cdot6+13\cdot(-17)=1$

したがって　$37(m-6)=13(-n-17)$　より　$m=13k+6$，$n=-37k-17$（k は整数）

と表せる．

よって，これを満たす整数 m のうち，正で最小のものは

$k=0$のときの$m=\mathbf{6}$　　このとき$n=\mathbf{-17}$

3　$N=abc_{(4)}=pqr_{(6)}$より　$N=\mathbf{16}a+\mathbf{4}b+c=36p+6q+r$

これと　$a+b+c=p+q+r$　より辺々引いて

$15a+3b=35p+5q$　これを変形して　$\mathbf{3}(5a+b)=\mathbf{5}(7p+q)$　……①

3，5 の最大公約数は $\mathbf{1}$ であることより，$5a+b$は 5 の倍数である．

したがって，b は 5 の倍数であることがわかる．

ここで，$\mathbf{0}\leqq b\leqq\mathbf{3}$であることから，$b=\mathbf{0}$である．

このとき①より　$15a=5(7p+q)$　　$3a=7p+q$

これを変形して　$p+q=3(a-2p)$　　左辺が正より　$a-2p$ も正

よって　$a-2p>0$　より　$a>2p$　であることがわかる．

$1\leqq a\leqq3$，$1\leqq p\leqq5$　よりこれを満たす a，p は $a=\mathbf{3}$，$p=\mathbf{1}$ のみ

このとき $q=2$，$c=r$ であることがわかる．

$N=16\cdot3+4\cdot0+c=48+c$

c は $\mathbf{0}\leqq c\leqq\mathbf{3}$ を満たすすべての整数をとり得るので，$N=48$，49，50，51

したがって，題意を満たす整数 Nのうち，最小のものは $N=\mathbf{48}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。